Geschlossene Raumkurven mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 43, 1992, S.7-12

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Geschlossene Raumkurven mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt

Von **Hans Robert Müller***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 9.10.1992)

Es werden geschlossene Raumkurven des dreidimensionalen euklidischen Raums gesucht, deren Normalprojektionen auf beliebige Ebenen des Raumes ebene Kurven vom orientierten Flächeninhalt Null sind.

I

Im dreidimensionalen euklidischen Raum betrachten wir eine geschlossene Raumkurve. Ihre Punkte X beziehen wir auf ein rechtwinkeliges normiertes Dreibein $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ und verwenden zur Erfassung des Punktes X einen reellen Parameter t. Es werde

$$\overrightarrow{0X} = x = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = \sum e_ix_i \tag{1}$$

gesetzt. Die Koordinaten x_i sind dann periodische Funktionen von t bei genügend hoher Differentiationsordnung. In der Folge genügen Stetigkeit und die Existenz stückweise stetiger Ableitungen. Einem einmaligen Durchlauf der Kurve entspreche die Periode T. Der Vektor

$$v = \oint x \times dx \tag{2}$$

wird als *„Flächenvektor"* bezeichnet, wobei das Integral über die geschlossene Raumkurve, d.h. die Periode T zu nehmen ist.

Der Normalriß der Raumkurve auf eine Ebene ε ist ebenfalls eine geschlossene Kurve. Sie umrandet in ε ein ebenes Gebiet vom orientierten Flächeninhalt F_n. Wir wollen F_n als *„Projektionsinhalt"* in Richtung n bezeichnen, wobei n Einheitsvektor ist. Mit Hilfe von v läßt sich F_n als Skalarprodukt einfach darstellen.

$$2\,F_n = n.\ v = n.\ \oint x \times dx. \tag{3}$$

Zum Beweis können wir voraussetzen, daß die Ebene ε durch den Ursprung 0 geht und $n = e_3$ gewählt wird. Der Normalriß wird vom Punkt X^n mit

$$x^n = x - (n.x)\,n$$

beschrieben. Wegen

$$dx^n = dx - (n.dx)\,n$$

führt die *Gauss*'sche Formel für den Flächeninhalt geschlossener ebener Kurven zu

* Prof. em. Dr. H. R. Müller · Am Schiefen Berg 49 · 3340 Wolfenbüttel

$$2\,F_n = \oint (x_1^n dx_2^n - x_2^n dx_1^n) = \oint (n\ x^n\ dx^n) = \oint (n\ x\ dx).$$

Somit

$$2\,F_n = n. \oint x \times dx,$$

wobei mit $(n\ x\ dx) = n.(x \times dx)$ das Spatprodukt bezeichnet wurde.

Führen wir noch

$$v_i = \oint (x_j\ dx_k - x_k\ dx_j) \tag{4}$$

bei zyklischen Anordnungen von $i,j,k = 1,2,3$ ein, so ist $v = \sum e_i\, v_i$. In gleicher Weise die Zerlegung des Projektions-Vektors $n = \sum e_i\, n_i$ und wegen (3)

$$2\,F_n = \sum n_i\, v_i, \tag{5}$$

II

In [1] hatte ich eine geschlossene sphärische Kurve betrachtet, die ich *„Tennisball-Kurve"* nannte und durch ein Bild (Normalriß) veranschaulichte. Sie hat die Eigenschaft, daß ihre Normalprojektionen auf beliebige Ebenen stets zu ebenen Kurven mit verschwindendem Flächeninhalt führen. Wegen (3) gilt also für alle Vektoren n, daß $F_n = 0$, was $v = 0$ und somit $v_i = 0$ für $i = 1,2,3$ zur Folge hat.

Unser Ziel ist nun, ein konstruktives Verfahren anzugeben, mit dessen Hilfe wir Parameterdarstellungen geschlossener Raumkurven ermitteln können, deren Projektionsinhalte für jede Projektions-Richtung Null sind.

Vorweg ist wegen (4) und (5) unmittelbar einzusehen der Satz:

> Hat eine geschlossene Raumkurve die Eigenschaft, daß ihre Projektionsinhalte für drei paarweise rechtwinkelige oder allgemeiner drei linear unabhängige Richtungen verschwinden, so gilt dies auch für die Projektion in beliebiger Richtung n.

Unwesentlich ist in der Folge die Wahl der Periode $T = 2\pi$. Als periodische Funktionen der Koordinaten x_i der gesuchten Kurve wählen wir *trigonometrische Polygone* des reellen Parameters t etwa aus dem Interval $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$x_i = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} (a_{i\nu} \cos \nu t + b_{i\nu} \sin \nu t). \tag{6}$$

Da die konstanten Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $b_{i\nu}$ auch verschwinden können, kann für die drei Koordinatenfunktionen x_i die gleiche Ordnung N der trigonometrischen Polygone angesetzt werden.

Dann gilt

$$d\,x_i = \sum_{\nu=1}^{N} \nu\,(-\,a_{i\nu} \sin \nu t + b_{i\nu} \cos \nu t)\ dt. \tag{7}$$

Nach (4) berechnen wir nun $v_i = 0$ und finden

$$v_i = \oint \left\{ \left[\frac{a_{j0}}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} (a_{j\nu} \cos t\nu t + b_{j\nu} \sin \nu t) \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{\mu=1}^{N} \mu (-a_{k\mu} \sin \mu t + b_{k\mu} \cos \mu t) -$$

$$- \left[\frac{a_{k0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{N} (a_{k\mu} \cos \mu t + b_{k\mu} \sin \mu t) \right] \cdot$$

$$\left. \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \nu (-a_{j\nu} \sin \nu t + b_{j\nu} \cos \nu t) \right\} dt = 0.$$

Bei der näheren Ausführung treten folgende Integrale auf

$$\left.\begin{array}{l} \oint dt = 2\pi, \ \oint \cos \nu t \ dt = 0, \ \oint \sin \nu t \ dt = 0 \text{ für } \nu = 1,2,\ldots N, \\ \oint \cos \mu t \sin \nu t \ dt = 0 \text{ für alle } \mu \text{ und } \nu. \\ \oint \cos \mu t \cos \nu t \ dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \pi & \text{für } \mu = \nu \neq 0. \end{cases} \\ \oint \sin \mu t \sin \nu t \ dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \pi & \text{für } \mu = \nu \neq 0. \end{cases} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Damit erhalten wir schließlich

$$v_i = 2\pi \sum_{\nu=1}^{N} \nu \, (a_{j\nu} b_{k\nu} - a_{k\nu} b_{j\nu}) = 0. \quad (9)$$

Diese drei Bedingungen für $i,j,k = 1,2,3$ (zyklisch) müssen also die trigonometrischen Polygondarstellungen der geschlossenen Raumkurve erfüllen, damit die Projektionsinhalte in beliebigen Projektionsrichtungen verschwinden.

Wenn wir von Verschiebungen der Kurve im Raum absehen, können wir bei der Wahl von trigonometrischen Polynomen der Ordnung N de 3N Konstantenpaare $a_{i\nu}$, $b_{i\nu}$ soweit willkürlich wählen, daß nur den drei Bedingungsgleichungen (9) genügt wird.

Ausgehend von einem Lösungssystem von (9) können wir etwa durch den Ansatz

$$\hat{a}_{j\nu} = a_{j\nu} + \lambda_\nu \cdot a_{k\nu}, \quad \hat{b}_{j\nu} = b_{j\nu} + \lambda_\nu \, b_{k\nu}$$

mit willkürlichen Konstanten $\lambda_\nu \neq 0$ für $\nu = 1,2,\ldots$ N zu weiteren Lösungen und damit Raumkurven der gewünschten Art gelangen

$$\sum_{\nu=1}^{N} \nu \, (\hat{a}_{j\nu} b_{k\nu} - a_{k\nu} \, \hat{b}_{j\nu}) = 0.$$

Andere elementare Umformungen des Klammerausdrucks in (9) sind ebenfalls möglich.

Beispiel:

Die Raumkurve mit der Parameterdarstellung

$$x_1 = 3\ a \cos t + b \cos 3t,\ x_2 = 3\ a \sin t - b \sin 3t,\ x_3 = -\frac{1}{2}\ ab \sin 4t$$

besitzt für $3\ a^2 - b^2 = 0$ verschwindende Projektionsinhalte. Nebenbei handelt es sich um eine *Gewindekurve* [3], die der Differentialgleichung $x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = 3\, dx_3$ genügt. Die besagte *Tennisballkurve* aus [1] wird jedoch bei der Wahl von

$$x_3 = 2\sqrt{3\ a\ b}\ \sin 2t$$

erfaßt.

III

Es ist nun naheliegend, von trigonometrischen Polynomansätzen zu *Fourierschen Reihen* ($N \to \infty$) überzugehen (vgl. etwa [2]). Konvergiert eine *Fourierreihe* im Interval $0 \leq t \leq 2\pi$ gleichmäßig, so stellt die Summenfunktion der unendlichen Reihe eine stetige Funktion dar.

Hinreichend für gleichmäßige Konvergenz ist jedenfalls, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| \quad \text{und} \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| \quad \text{konvergent} \tag{10}$$

sind, wofür das Wurzelkriterium in der Form

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = k_1 < 1,\ \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = k_2 < 1 \tag{11}$$

wiederum hinreicht.

Wir schätzen in (9) ab

$$|a_{j\nu}\, b_{k\nu} - a_{k\nu}\, b_{j\nu}| \leq |a_{j\nu}| \cdot |b_{k\nu}| + |a_{k\nu}| \cdot |b_{j\nu}| \tag{12}$$

und untersuchen erst die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |a_{j\nu}| \cdot |b_{k\nu}|$$

hinsichtlich ihrer Konvergenz.

Die Anwendung des Wurzelkriteriums (11) auf $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |a_{j\nu}| \cdot |b_{k\nu}|$ ergibt wegen $\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\nu\, |a_{j\nu}| \cdot |b_{k\nu}|} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_{j\nu}|} \cdot \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|b_{k\nu}|} = k_1 \cdot k_2 < 1. \tag{13}$$

In gleicher Weise wird auch die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|a_{k\nu}| \cdot |b_{j\nu}| \text{ bestätigt. Wegen (12) konvergiert auch}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|a_{j\nu}\,b_{k\nu} - a_{k\nu}\,b_{j\nu}|.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist also die absolute Konvergenz von

$$v_i = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,(a_{j\nu}\,b_{k\nu} - a_{k\nu}\,b_{j\nu}) \tag{14}$$

gesichert.

Das Verschwinden der Summenfunktionen $v_i = 0$ für $i = 1,2,3$ ist gemäß (9) hinreichende Bedingung, daß die *Fourierreihen*

$$x_i = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{i\nu} \cos \nu t + b_{i\nu} \sin \nu t) \tag{15}$$

für $i = 1,2,3$ zu einer Raumkurve mit verschwindenden Projektionsinhalten führen.

IV

Ist umgekehrt eine geschlossene Raumkurve durch ihre Parameterdarstellung $x = x(t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und der Periode 2π vorgegeben, so kann die Untersuchung, ob die Kurve verschwindende Projektionsinhalte besitzt, nach (4) durch Überprüfung von

$$\oint (x_j\,dx_k - x_k\,dx_j) = 0$$

vorgenommen werden. Durch partielle Integration wird gefunden

$$\oint x_j\,dx_k = x_j\,x_k\Big|_0^{2\pi} - \oint x_k\,dx_j$$

und damit

$$\oint (x_j\,dx_k - x_k\,dx_j) = x_j\,x_k\Big|_0^{2\pi} - 2\oint x_k\,dx_j = 0.$$

Als unter Umständen zweckmäßigeres Kriterium kann daher dienen

$$2\oint x_k\,dx_j = x_j\,x_k\Big|_0^{2\pi} \quad \text{oder} \quad 2\oint x_j\,dx_k = x_j\,x_k\Big|_0^{2\pi}. \tag{16}$$

Nun sind aber die Funktionen $x_i(t)$ als periodische Funktionen vorausgesetzt. Somit verschwindet $x_j\,x_k\big|_0^{2\pi} = 0$ in (16). Als Bedingung für $v_i = 0$, d.h. für eine Kurve mit verschwindenen Projektionsinhalten finden wir somit

$$\oint x_j\,dx_k = 0 \quad \text{oder} \quad \oint x_k\,dx_j = 0. \tag{17}$$

An der symmetrischen Bedingung (9) zwischen den *Fourierkoeffizienten* $a_{j\nu}$ und $b_{j\nu}$ ändert sich jedoch nichts, wie man der Herleitung von (9) sofort entnimmt. Gleiches gilt für Formel (14).

Falls die Parameterdarstellung $x = x(t)$ der zu untersuchenden Raumkurve derart ist, daß die Berechnung der Integrale in (17) Schwierigkeiten bereitet, kann auch der Umweg über *Fourierreihen* versucht werden. Falls $x_i(t)$ stetige und $\dot{x}_i = dx_i : dt$ stückweise stetige Funktionen sind, konvergieren die zu x_i gehörenden *Fourierreihen* an jeder Stelle t absolut und gleichmäßig und stellen die Funktionen $x_i(t)$ dar.

Literaturverzeichnis

[1] *H.R. Müller:* „Sphärische Kinematik", Mathem. Monographien Bd. **6**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1962.

[2] *R. Courant:* Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung **1**. 4. Aufl., Springer-Verlag Berlin – Heidelberg – New York 1971.

[3] *H.R. Müller:* Gewindekurven und ebene Kinematik. Abhandl. der Braunschweig. Wiss. Ges. Msch. XXXIV (1982), 39–45.